Integración de funciones racionales por descomposición en fracciones simples:

$$\int \frac{P(X)}{Q(X)}dx$$

Cuando el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, hay que dividir:

$$\int \frac{P(X)}{Q(X)}dx = \int cociente\ dx + \int \frac{resto}{Q(X)}dx$$

Una vez que el grado del numerador es menor que el del denominador, procedemos ha hacer la descomposición en factores del denominador. Por ejemplo:

$$\int \frac{x+5}{x^2-5x+6}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Expresamos la fracción como la suma de varias fracciones en las cuales el denominador son los factores y el numerador es un numero en el caso de que el factor tenga raíz real y un polinomio de grado 1 si no tiene raíz real:

x+6	A
x-5	B
x^2-1	Cx+ D

En nuestro caso:

$$\frac{x+5}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

Sumamos las fracciones entre si. Igualamos los numeradores y damos valores a la x (tantos como coeficientes tenemos, y preferentemente los que hacen que el denominador se anule) para calcular los coeficientes A, B...

$$\frac{x+5}{x^2-5x+6}=\frac{A\,(x-3)+B\,(x-2)}{(x-2)\,(x-3)}$$

$$x+5=A\,(x-3)+B\,(x-2)$$

$$X=2 \quad\Rightarrow\quad 2+5=A\,(2-3)+B\,(2-2) \quad\Rightarrow\quad A=-7$$

$$X=3 \quad\Rightarrow\quad 3+5=A\,(3-3)+B\,(3-2) \quad\Rightarrow\quad B=8$$

Metemos los coeficientes en las fracciones e integramos:

$$\int \frac{x+5}{x^2-5x+6}\,dx=\int \frac{-7}{x-2}\,dx+\int \frac{8}{x-3}\,dx=-7\,\ln(x-2)+8\,\ln(x-3)+C$$

Integración de funciones racionales por descomposición en fracciones simples:

Otro ejemplo:

$$\int \frac{2}{x^3+x}\,\mathrm{dx} \qquad \Rightarrow \qquad x^3+x = x(x^2+1)$$

$$\frac{2}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$$

$$\begin{array}{llllll}
x=0 & \Rightarrow & 2 = A(0^2+1)+(B\,0+C)\,0 & & \Rightarrow & \mathrm{A = 2} \\
x=1 & \Rightarrow & 2 = A(1^2+1)+(B\,1+C)\,1 & \Rightarrow \quad \mathrm{2 = 2A+B+C} & \Rightarrow & \mathrm{B = -2} \\
x=-1 & \Rightarrow & 2 = A\left[(-1)^2+1\right]+\left[B(-1)+C\right](-1) & \Rightarrow \quad \mathrm{2 = 2A+B-C} & \Rightarrow & \mathrm{C = 0}
\end{array}$$

$$\int \frac{2}{x^3+x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{dx} + \int \frac{-2x+0}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{dx} - \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = 2\,\ln x - \ln\left(x^2+1\right) + C$$

En el caso de que alguno de los factores este elevado a una potencia, hay que contar ese factor tantas veces como indica la potencia y en forma decreciente. Por ejemplo:

$$\int \frac{3}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{dx} \Rightarrow x^3+2x^2+x = x\,(x+1)^2$$

$$\frac{3}{x^3+2x^2+x} = \frac{3}{x\,(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x\,(x+1)^2}$$

y luego se sigue igual.