PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

1. Hallar el número de términos y la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 4, el último 62500 y la suma de todos sus términos 78124.

2. La razón de una progresión geométrica es 2, el número de términos 11 y la suma de todos ellos 2047. Halla el primero y el último de los términos.

3. Hallar la suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es igual a $\sqrt[5]{\frac{1}{a}}$ y el primer término es igual a $\sqrt{a}$.

4. Halla la suma de las 12 primeras potencias de 2.

5. Halla la suma de los siete primeros términos de la progresión cuyos tres primeros términos son: $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

6. La suma de los 5 términos que forman una progresión geométrica es $(b^2+1)(b+1)$ y la razón es b. ¿Cuánto vale el primer término?

7. En una progresión geométrica de tres términos, la suma de ellos es 133 y el primero vale 1. ¿Cuál es la razón?

8. Interpolar 4 medios proporcionales entre 0,96 y 0,03.

9. Halla la fracción generatriz del número $0,\overline{27}$. (Hazlo mediante una progresión geométrica adecuada).

10. El primer término de una progresión geométrica es 1, el producto de todos sus términos es 32768 y el número de términos es 6. Calcula su suma.

11. Halla la fracción generatriz del número $0,4\overline{32}$.

12. El primer término de una progresión geométrica es 1 y la razón 3. Halla la suma de los términos comprendidos entre el segundo y el noveno.

13. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión cuyos primeros términos son: $2,\ -2^2,\ 2^3,\ -2^4,\ \ldots$

14. El primer término de una progresión geométrica ilimitada de razón menor que 1 es 2/3, y el límite de la suma de todos sus términos es 1. Calcula la razón de la progresión.

15. En una progresión geométrica de cinco términos, el último es doble del tercero y el producto de todos ellos es igual a $4\sqrt{2}$. Hallar todos los términos de la progresión.

16. Dado un cierto número entero de 6 cifras, agrupamos sus cifras de dos en dos: centenas de millar con decenas de millar, millares con centenas y decenas con unidades. Los tres números de dos cifras que se obtienen forman una progresión geométrica de razón 2. Si a 1000 veces la suma de los términos de dicha progresión se le agrega el número inicial se obtiene 412896. ¿Cuál era ese número?

17. En una bodega hay dos enormes depósitos de vino A y B. Todos los días se sacan ciertas cantidades de vino de cada uno de los depósitos. Del depósito A se extrajeron 5 litros el primer día, 10 el segundo, 20 el tercero y así sucesivamente. Del depósito B se extrajeron 2 litros el primer día, 4 el segundo, 8 el tercero y así sucesivamente. El último día se extrajeron del depósito A 96 litros más que del depósito B. ¿Cuántos litros de vino se extrajeron en total de cada depósito y durante cuántos días?

18. En una progresión geométrica ilimitada de razón menor que uno, el segundo término vale 16 y el límite de la suma de todos sus términos es 64. Calcula el primer término y la razón.

19. En una progresión geométrica la suma de los dos primeros términos es 12 y la suma del primero con el tercero es 30. Halla la suma de los cinco primeros términos.

20. Los dos primeros términos de una progresión geométrica son 9/16 y 9/4. Halla dos términos consecutivos de dicha progresión cuyas raíces cuadradas se diferencien en 48.

21. La población de una provincia ha aumentado durante 5 años en progresión geométrica, pasando de 200000 a 322102 habitantes. ¿Cuál ha sido la razón de la progresión? Exprésala en %.

22. En una progresión geométrica ilimitada de razón menor que 1 el límite de la suma de todos sus términos es doble de la suma de los cinco primeros términos. Halla la razón de dicha progresión.

23. Un estanque de 28800 metros cúbicos de capacidad se llena de agua en dos horas por medio de cuatro caños cuyos caudales de agua (en metros cúbicos por segundo) están en progresión geométrica de razón 3. Averigua el caudal de cada uno de los caños.

24. Un pueblo, que hace unos años tenía una población de 10000 habitantes, hoy sólo tiene 6561. Cada año la disminución ha sido del 10% de sus habitantes. ¿Cuántos años hace que la población era de 10000?

25. Cuenta la leyenda que el inventor del juego del ajedrez pidió como recompensa a su rey un grano de arroz por la primera casilla, dos por la segunda, cuatro por la tercera, 8 por la cuarta y así sucesivamente hasta completar las 64 casillas que tiene el tablero. ¿Cuántos hectolitros de arroz pidió el inventor suponiendo que en un litro caben 20000 granos de arroz?

26. Radio Macuto: A las 9 de la mañana una persona cuenta un secreto a tres amigos con la condición de que no se lo cuenten absolutamente a nadie. A las 9’30 horas de la mañana cada uno de esos tres “amigos” se lo ha contado a otros tres con la misma condición. A las 10 de la mañana cada uno de estos amigos se lo ha contado a otros tres y así sucesivamente cada media hora. Suponiendo que se ha tenido la inmensa suerte de que a nadie se lo han contado por dos vías diferentes, ¿cuánta gente estaría enterada del “secreto” a las 4 de la tarde?

27. Averigua para qué valores de K las expresiones siguientes están en progresión geométrica: K+3, 6K+3, 20K+5.

28. Halla el valor de x para que las siguientes expresiones formen una progresión geométrica: x+2, 3x+2, 9x-2.

29. A una cuerda de 700 mm de longitud se le dan dos cortes de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 100 mm. Hallar la longitud de cada trozo sabiendo que los números que las representan están en progresión aritmética.

30. Interpolar tres medios proporcionales entre **a** y $\mathbf{ab^2}$.

31. Averiguar cuántos medios proporcionales pueden interpolarse entre 3 y 384 siendo 2 la razón de la progresión.

32. En una progresión geométrica de 14 términos la suma de los términos que ocupan lugar impar es 16383 y la suma de los términos que ocupan lugar par es 32766. Halla el primer término y la razón.

33. Calcular el límite de la suma $2-\frac{4}{7}+\frac{8}{49}-\frac{16}{343}+...$

34. El límite de la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada es 6 y la suma de los dos primeros términos es 4’5. Calcula el primer término.

35. La suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada es 4 y el primer término vale 3. ¿Cuál será la suma de los términos de la progresión que tuviera como términos a los cuadrados de los de la anterior?

36. El límite de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica ilimitada es 64; el segundo término es 64. Hallar el primer término y la razón.

37. Calcular el límite de las sumas:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+...\right)+...+\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{(2^n+1)^2}+\frac{1}{(2^n+1)^3}+...\right)$$

38. En un cuadrado de 5 cm de lado se unen los puntos medios de sus lados y se obtiene otro cuadrado inscrito; en este se realiza la misma operación y así se continúa indefinidamente. Hallar la suma de las áreas de los cuadrados así obtenidos.

39. En un triángulo equilátero de 3 m de lado se hace la misma operación del ejercicio anterior. Hallar la suma de las áreas de los triángulos equiláteros así obtenidos.

40. En un círculo de 1 m de radio se inscribe un cuadrado; en éste se inscribe un círculo; en éste otro cuadrado y así sucesivamente. Halla el límite de la suma de las áreas de todos los círculos así construidos.

41. Se tiene una sucesión indefinida de círculos concéntricos en los que cada radio mide la mitad del anterior. Hallar la suma de las áreas de todos estos círculos sabiendo que el radio del primero vale 4 cm

En los siguientes ejercicios se trata de calcular fracciones generatrices de decimales periódicos utilizando métodos de cálculo con progresiones geométricas.

42. Halla la fracción generatriz del número 0’253253.....

43. Halla la fracción generatriz del número 0’181818......

44. Halla la fracción generatriz del número 5’030303....

45. Halla la fracción generatriz del número 0’6252525......

En los ejercicios siguientes se trata de hallar el límite de las expresiones que aparecen usando métodos de cálculo con progresiones geométricas ilimitadas.

46. $\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+...$

47. $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4...}}}$

48. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+...$

49. $\dfrac{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+...}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+...}$

50. $\sqrt[3]{7\sqrt{5\sqrt[3]{7\sqrt{5\sqrt[3]{7...}}}}}$

51. 1+0’1+0’01+0’001+....

52. Halla, razonadamente, los valores de x para que las expresiones x-2, 2x-1 y 4x+13 estén en progresión geométrica. Para esos valores de termina la suma de la progresión geométrica ilimitada

$$\left\{\frac{1}{x-2},\frac{1}{2x-1},\frac{1}{4x+13},....\right\}$$

53. Resuelve el sistema $\begin{cases}6x-y-z=0\\ x+y+z=7\end{cases}$ sabiendo que x,y,z forman una progresión geométrica.

54. Tres números, x, y, z, suman 19. Colocados en ese orden forman una progresión geométrica pero si se disminuye el primero en una unidad están en progresión aritmética. Calcula esos números.

55. Hallar las dimensiones de un estanque de las que se sabe que suman 21 m y que están en progresión geométrica. La capacidad del estanque es de 216 m^3.

56. Demuestra que los números $\left\{ \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}, \frac{8}{9\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}, ... \right\}$ están en progresión geométrica.

57. La razón de una progresión geométrica es $r=\sqrt{3}$ y su tercer término es $a_3=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Calcula el sexto término y la suma de los seis primeros.

58. Averigua para qué valor de n se cumple la siguiente igualdad: $5+5^2+5^3+...+5^n=19530$

59. Demostrar que si los números ***a***, ***b*** y ***c*** están en progresión geométrica, entonces la ecuación de segundo grado $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ no tiene soluciones reales y que la ecuación $\boldsymbol{ax^2+2bx+c=0}$ tiene una raíz real doble.

60. Demostrar que si la sucesión de números reales positivos $\{\mathbf{a_n}\}$ es una progresión geométrica, entonces la sucesión $\{\mathbf{b_n}\}$, en la que $b_n = \log a_n$ es una progresión aritmética.